3．投資機会集合と最適ポートフォリオ

(1)　2つのリスク証券の場合

①　投資機会集合

第2章の(5)で、相関係数について勉強しました。

今、2つの証券の間に完全に正の相関関係、完全に負の相関関係があるか、すなわち相関係数にして1であるとか、－1の関係があるとかを考えてみると、常識的かつ歴史的に判断して、それは極めて希なケースといって差し支えないと思います。

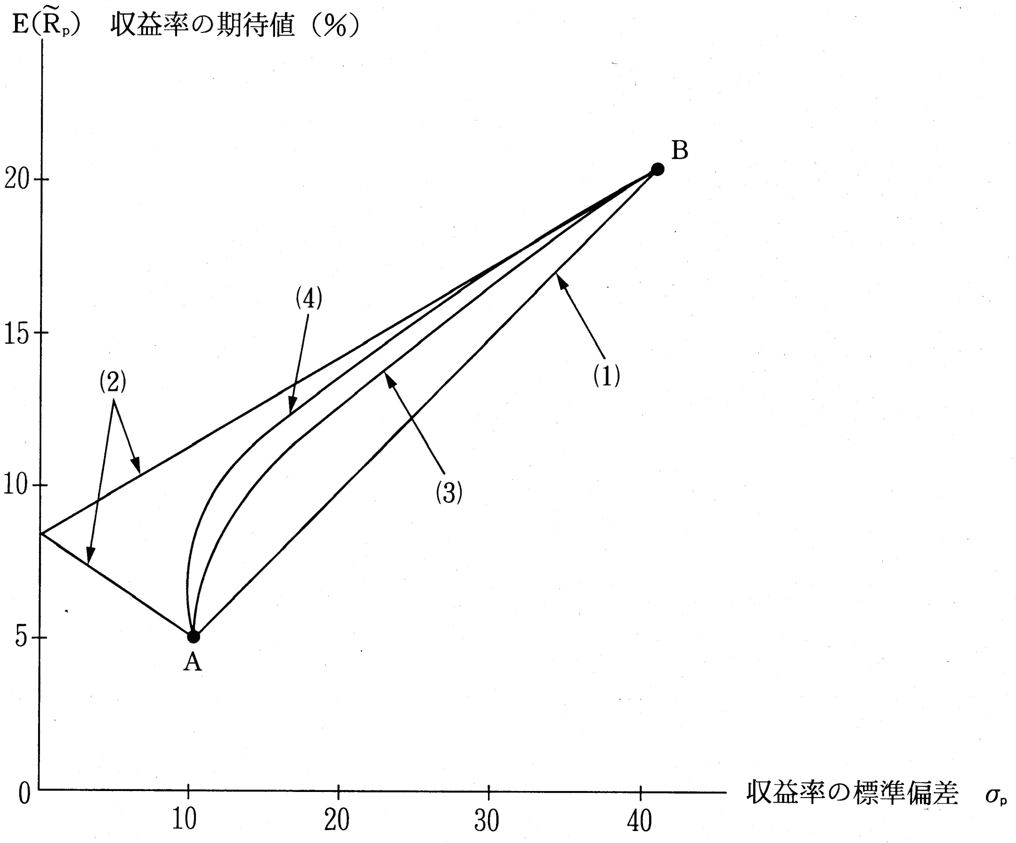
従って、今後は2つの証券の相関係数は、－1＜相関係数＜1の範囲にあると考えて勉強を進めていきます。

第2章の(8)で相関係数に応じて、2つのリスク証券の投資比率を様々に変化させた時のポートフォリオの、「収益率の期待値」と「収益率の標準偏差」の対応関係について勉強しました。

たった今結んだ約束どおり、－1＜2つの証券の相関係数＜1とすると、2つのリスク証券の投資比率を様々に変化させた時の、ポートフォリオの「収益率の期待値」と「収益率の標準偏差」の組み合わせを結んだ線は曲線になります。

この曲線を、**投資機会集合**といいます。図2－30の(3)、(4)が、約束した条件下での投資機会集合です。本項で勉強しているのは、リスク証券が2つの場合の組み合わせですから、2つの証券の可能な限りの組み合わせによってできる＝投資することが可能な集合ということができます。

図 2－30



② 最適ポートフォリオ（2つのリスク証券の場合）

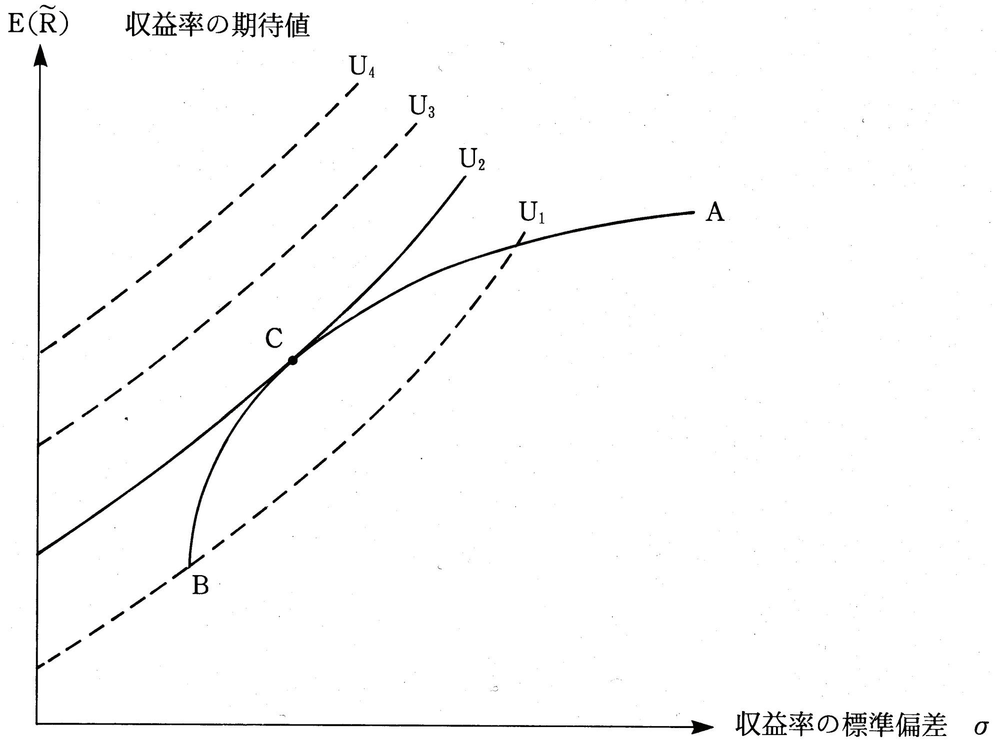
図 2－31 を見て下さい。図 2－30 からある投資機会集合の曲線を 1 本抜き出して、曲線 AB としました。ところで、曲線 U_1、U_2、U_3、U_4 はなんでしょうか？これは今や第 2 分冊の途中から完全に独壇場となった、危険回避的投資家の効用無差別曲線（心の満足度曲線）です。覚えていますか？

この図から見て、U_4、U_3 は心の満足が U_2 より上位にあるのですが、曲線 AB と触れ合うことすらできません。「200 円であわびを腹いっぱい食べたい」といっているようなもので、実行不可能な無差別曲線です。U_1 は実行可能なポートフォリオを含んでいますが、U_2 より心の満足度が劣ります。

さすれば、投資機会集合曲線 AB と、危険回避的投資家の効用無差別曲線が接する点 C が、実行可能なポートフォリオの中で最も心の満足度が高いこととなります。点 C と重なるように投資比率を組み合わせたポートフォリオのことを、最

も心の満足度が高いので、**最適ポートフォリオ**といいます。すなわち、実現可能なポートフォリオの組み合わせの中で、最も心の満足度が高いので「最適」といわれるのです。

図2－31



(2)　3つ以上沢山の場合

①　投資機会集合

さて、証券が2つの場合の投資機会集合は、曲線で示されました。では、証券が沢山組み込まれたポートフォリオの投資機会集合は、どのような形で示されるのでしょうか。例えば想像するに、証券AとBの相関係数は0.85、証券Aと証券Cのそれは－0.25、証券Aと…証券Xのそれは、証券Bと証券Cのそれは、証券Bと…証券Xのそれは、といった入り組んだ関係を計算する必要がありそうですね。

そこで、この計算はコンピュータが行ったものとして、形を見てもらうことにしましょう。

図2－32と図2－33の網かけ部分が、3つ以上の沢山の証券が組み込まれた場合のポートフォリオの投資機会集合です。もとより任意の2証券の相関係数が、－1より大きく1より小さいとして計算されています。

ここで、図2－32は証券の空売りが無制限に許される場合で、図2－33は空売りが許されない場合です。若干補足説明が必要な言葉を使ってしまいました。

空売りが無制限に許されるとは、例えばポートフォリオが証券A、証券B、証券Cの3証券で構成されていた場合、41ページの(3)空売りで勉強したように、投資割合の合計が1になる必要がありますが、その条件さえ満たせば下のパターンに示すように、どんな割合で空売りしてもよいですよということです。

パターンⅠ		
証券A	証券B	証券C
1.5	1	－1.5

パターンⅡ		
証券A	証券B	証券C
7.5	－2	－4.5

図2－32　空売りが許される場合の投資機会集合

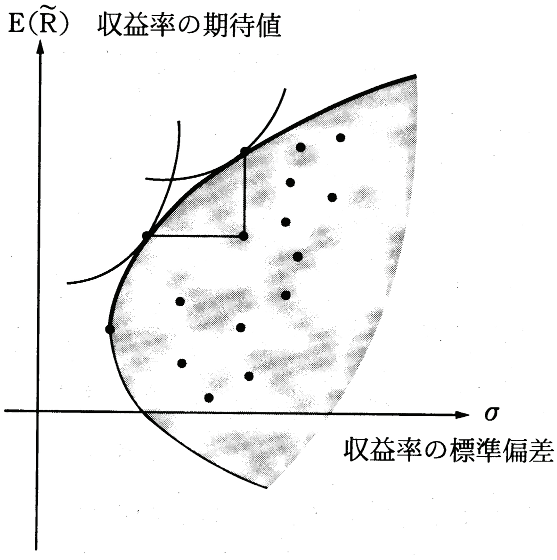
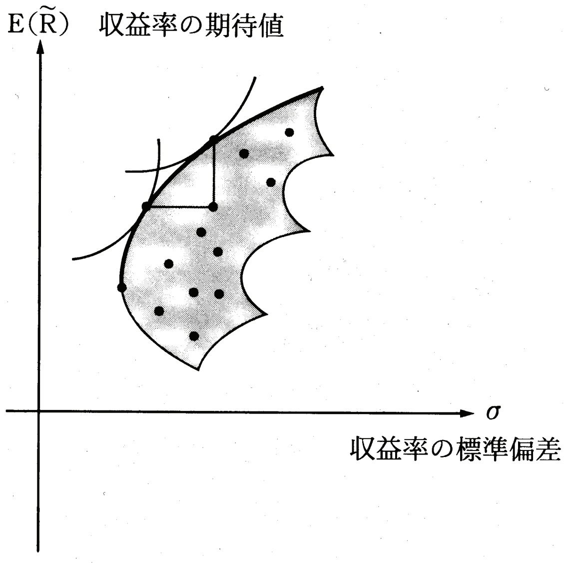


図2－33　空売りが許されない場合の投資機会集合



〔例題 12〕

図 2－32 では、「収益率の期待値」にマイナスの部分がありますが、そんなポートフォリオができるのですか。

〔解説〕

第 2 章の(3)空売りの〔例題 8〕の問 e）を思い出して下さい（41 ページ参照）。ポートフォリオの「収益率の期待値」がゼロとなっていましたね。もし例題の証券 B の「収益率の期待値」が 40% 超だった場合、あるいは証券 A の「収益率の期待値」が 20% 未満であった場合、ポートフォリオの「収益率の期待値」はマイナスの値になるはずです。従って、空売りが許される場合の投資機会集合は、マイナスになるケースも描かれているわけです。

もちろん、「収益率の期待値」がマイナスのポートフォリオは誰も選択しませんけれど、組めるということを示しているのです。

(3)　最小分散境界

ここで、危険回避的投資家について、もう一度性格分析の結果を確認しておきましょう。

●危険回避的投資家の性格分析●

1）リターン（「収益率の期待値」）が同じであれば、リスク（「分散・標準偏差」）の小さい証券を選択する。

2）リスク（「分散・標準偏差」）が同じであれば、リターン（「収益率の期待値」）の高い証券を選択する（これは危険回避的投資家だけではなく、すべての投資家にあてはまりますが）。

〔例題 13〕

次の図2－34は、空売りが認められた場合の投資機会集合を表しています。危険回避的投資家は、3つのポートフォリオY、Y′、Y″の中ではいずれを選定するでしょうか。

〔解説〕

図2－34

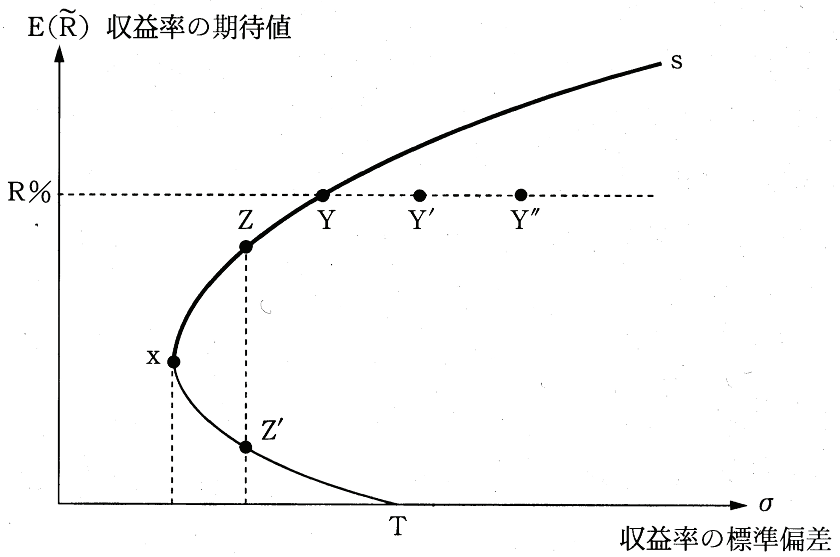


図2－32は空売りを無制限に認められた場合の投資機会集合でしたが、最初から「収益率の期待値」がマイナスの部分は、危険回避的投資家でなくともお呼びじゃないので、削ったのが図2－34です。

この投資機会集合のある「収益率の期待値」R%から、横軸に対して平行線を引いてみましょう。この直線上に位置するポートフォリオの「収益率の期待値」は、すべてR%で同一です。とするならば、危険回避的投資家はY、Y′、Y″の3点の中では、リスクが最も小さいのでYを選択します。

曲線SZXTは、このように同じ「収益率の期待値」を達成するのに要する、リスクの負担が最も小さい（すなわち分散投資の効果が大きい）投資機会集合なので、**「最小分散境界」**と呼ばれています。最小分散境界より右側に位置するポー

トフォリオは、最小分散境界上のポートフォリオに比べると、「収益率の期待値」が同じでもリスクがより高いので、「危険回避的投資家のポートフォリオ選定会議」において早々に1次予選落ちとなります。

但し、最小分散境界として1次予選通過したポートフォリオでも、2次予選で敗退するポートフォリオが出てきます。それは、次の(4)の効率的（有効）フロンティアで説明します。

なお、点Xは最小分散境界上のポートフォリオの中でも、最も分散が小さいので、「大局的最小分散ポートフォリオ」と呼ばれます。

(4) 効率的（有効）フロンティア（Efficient Frontier）

〔例題14〕

先の図2－34において、危険回避的投資家は最小分散境界上のポートフォリオZとZ′では、どちらを選択するでしょうか。

〔解説〕

図2－34をもう一度見て下さい。点Zと点Z′を比べた場合、危険回避的投資家はその性格分析から、同じリスクなら「収益率の期待値」が高いポートフォリオを選択します（この性格は、危険回避的投資家に限らず誰でも該当しますが）。

当然点Z′よりも、点Zのポートフォリオを選択するのは明らかです。となると、大局的最小分散ポートフォリオ点Xより、Tにかけての右肩下がりの曲線XZ′Tは、(3)で述べたようにより効用の高いポートフォリオが最小分散境界上に存在することとなり、残念ながら「ポートフォリオ選定会議」2次予選で敗退することとなります。

結局、危険回避的投資家は、残った曲線SZX上のポートフォリオを選択することとなります。この曲線SZXを「**効率的（有効）フロンティア**」、その曲線上のポートフォリオを「**効率的（有効）ポートフォリオ**」と呼びます。

効率的ポートフォリオのいずれを選択するかは、第１章の⒁効用無差別曲線（27ページ参照）で勉強したように、投資家の心の満足が得られるリスクとリターンの関係において決定されることでしょう。

【練習問題10】

次の語句について説明して下さい。

⑴　投資機会集合

⑵　最小分散境界

⑸　安全証券を組み入れた場合のポートフォリオの「収益率の期待値」と「収益率の分散・標準偏差」－１つのリスク証券と安全証券－

テキストの冒頭で、安全証券（無リスク証券）を定義しました。それ以来、私たちはリスク証券についてのみ勉強してきましたが、ここで安全証券も加えて勉強することとなります。

〔例題15〕

安全証券の「収益率の分散・標準偏差」はどのように計算したらよいでしょうか。

〔解説〕

図２－35を見るまでもなく、安全証券の収益率は必ず生起確率１で１つの値が達成される以上、分散・標準偏差はゼロなのです。そうでなければ、安全証券の資格はないのです。

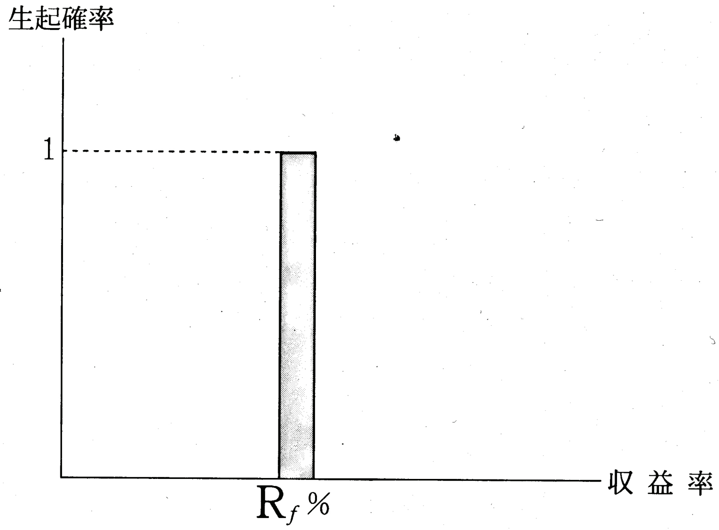
また、安全証券に対しては倒産リスクなどのリスク・プレミアムが要求されませんので、その利子率はリスク・フリー・レート（Risk Free Rate）となります。

安全証券の利子率は頭文字をとって、よく R_f で表示されますので、当テキストでもそれに従います。

その安全証券をポートフォリオの中に組み入れるのは、資産運用において至極当然のことで、例えばファンドの一部を預金したり、保有期間と残存期間が一致する国債に投資したりしています。

このような安全証券を組み入れた場合の最適ポートフォリオはどうなるかについて、勉強していきましょう。

図2－35　安全証券の「収益率の期待値」と生起確率



〔例題16〕

証券Aの「収益率の期待値」をR_A、「収益率の標準偏差」をσ_Aとします。安全証券の利子率はR_f、標準偏差は当然ゼロですが、その場合のポートフォリオの「収益率の期待値」と「収益率の標準偏差」、すなわち投資機会集合はどのような形となりますか。

〔解説〕

まず、安全証券とリスク証券とを組み合わせたポートフォリオの、「収益率の期待値」と「収益率の標準偏差」の関係についてみていきましょう。

今、リスク証券である証券Aと、安全証券からなるポートフォリオを〔P4号〕と呼びます。

証券Aの「収益率の期待値」は R_A、「収益率の標準偏差」は σ_A、安全証券の利子率は R_f で表す約束でした。

今、リスク証券Aの投資比率を ω_A とすると、安全証券への投資比率は、（$1-\omega_A$）となりますね。$\omega_A+(1-\omega_A)=1$ですから。

〔P4号〕の「収益率の期待値」は、第2章の(2)で学習したように、投資比率に応じた加重平均ですから、

$$E(\widetilde{P}_{4号})=\omega_A E(\widetilde{R}_A)+(1-\omega_A)R_f$$

で表されます。

また、〔P4号〕の「収益率の分散」は、これまた52ページの(6)ポートフォリオのリスクで勉強したように、いくつか式がありますが、例えば57ページ(18)式を例示すれば（便宜上、安全証券をBとして記述しています）、以下のとおりでしたね。

$$(\sigma_{P4号})^2=(\omega_A)^2(\sigma_A)^2+(1-\omega_A)^2(\sigma_B)^2$$
$$+2\,\omega_A(1-\omega_A)\,\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}$$

：対訳：

（証券Aの投資比率）^{2}（証券Aの収益率の分散）
＋（安全証券の投資比率）^{2}（安全証券の収益率の分散）
＋2×（証券Aの投資比率）（安全証券の投資比率）
×（証券Aの収益率の標準偏差）（安全証券の収益率の標準偏差）
×（証券Aと安全証券の相関係数）

となりますが、〰〰の部分に書かれている安全証券の収益率の標準偏差はゼロです。また、リスク証券と安全証券の収益率の相関係数もゼロですから、上の式の第2段目から第3段目の項である、

$$(1-\omega_A)^2(\sigma_B)^2 \quad および \quad 2\,\omega_A(1-\omega_A)\,\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}$$

は、全部ゼロとなってしまいます。

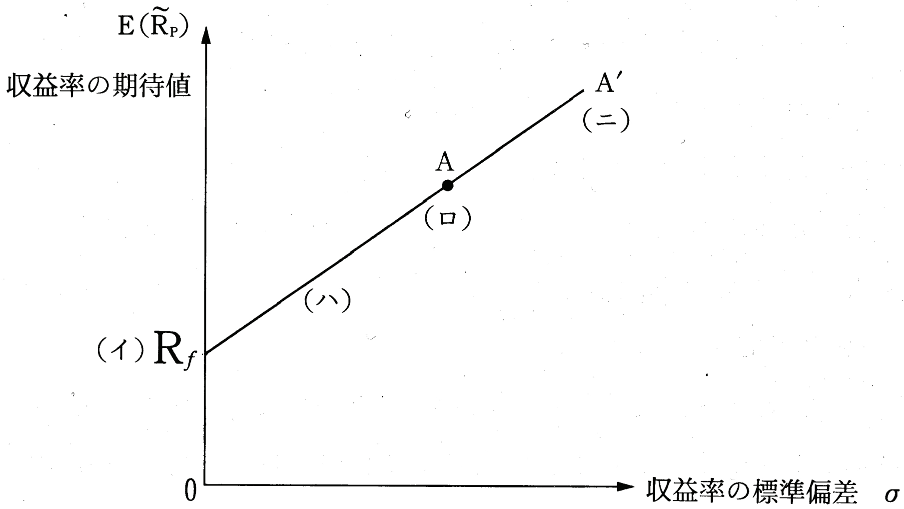
その結果、

$$(\sigma_{P4号})^2=(\omega_A)^2(\sigma_A)^2$$

$$\sigma_{P4号}=\sqrt{(\omega_A)^2(\sigma_A)^2}=\omega_A\sigma_A$$

となります。このことは、σ_A を所与とすると証券Aの投資比率に正比例して、〔P４号〕の「収益率の標準偏差」は増加することを意味していますから、〔P４号〕の「収益率の期待値」と「収益率の標準偏差」の関係、すなわち投資機会集合は、図２−36のように直線で示すことができます。

図２−36　安全証券とリスク証券を組み合わせたポートフォリオの「収益率の期待値と標準偏差」−投資機会集合−



〔例題17〕

図２−36の（イ）、（ロ）、（ハ）、（ニ）においては、安全証券とリスク証券はどのような割合で投資されたのでしょうか。

〔解説〕

以下のような投資比率によって投資されています。

● （イ）の点 R_f は、自己資金を100％安全証券に投資した場合。

- （ロ）の点 A は、自己資金を 100% リスク証券 A に投資した場合。
- （ハ）の直線 R_fA（R_f、A を除く）の部分は、安全証券とリスク証券 A にある一定比率で投資した場合（特に**貸付ポートフォリオ**と呼びます）。
- （ニ）直線 AA′（A を除く）部分は、安全証券を空売り（R_f の利子率で借入れを行ったのと同じ意味）して、その資金と自己資金をリスク証券 A に投資した場合（特に**借入れポートフォリオ**と呼びます）。

【練習問題 11】

リスク証券 Y の「収益率の期待値」は 15%、「収益率の標準偏差」は 10% です。また、安全証券の利子率 R_f は5%とします。

(1) この時、以下の投資割合で証券 Y と安全証券に投資した場合のポートフォリオの「収益率の期待値」と「収益率の標準偏差」を求めて下さい。

① 自己資金を 100% 安全証券に投資した場合。

② 自己資金を 100% リスク証券 Y に投資した場合。

③ 安全証券に 50% と、リスク証券 Y に 50% 投資した場合。

④ 安全証券を 50% 空売りして、その資金と自己資金をリスク証券 Y に 150% 投資した場合。

(2) 前問(1)の各ケースで答えた「収益率の期待値」と「収益率の標準偏差」の対応関係をプロットして、投資機会集合が直線になることを確認して下さい。

(6) 安全証券を組み入れた場合の最適ポートフォリオ

(5)の〔P 4 号〕の例では、リスク証券はただ 1 つ、証券 A だけでした。「リスク証券だけで構成されたポートフォリオ」（長ったらしいので、今後はリスク証券ポートフォリオと呼びます）を考えた場合、第 2 章で勉強したようにポートフォリオそのものも固有の「収益率の期待値」、「分散・標準偏差」を持っている以上、安全証券

を加えた場合、証券Aのケースと同様に考えることができます。リスク証券のポートフォリオをリスク証券1つと考えればよいのです。

従って、その「収益率の期待値」と「収益率の標準偏差」の関係は、R_f を切片とした直線関係で表すことができます。

問題は証券Aと特定した場合の、「収益率の期待値」と「収益率の標準偏差」の関係は縦軸、横軸を見ながら1点ポツンと打てる関係にありましたが、73ページの(4)で勉強したように、「リスク証券の組み合わせで構成されるポートフォリオは効率的フロンティアの上にある、効率的ポートフォリオの中から選ばれる。いずれを選択するかは、投資家の心の満足の得られるリスクとリターンの関係」でしたから、今の段階では点ではなく、曲線でしか示されていません。

それでは安全証券と、リスク証券ポートフォリオの曲線のポイントを任意に抽出して、ポートフォリオを構成すれば、投資家の効用は同じになるのでしょうか。

図2－37を見て下さい。

図2－37

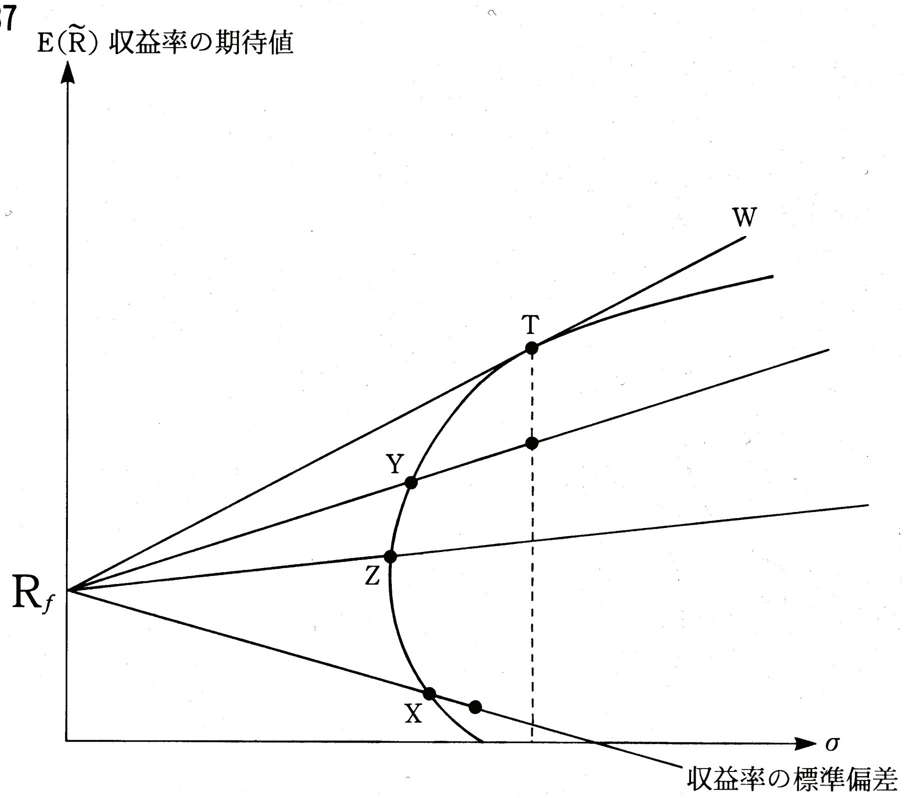


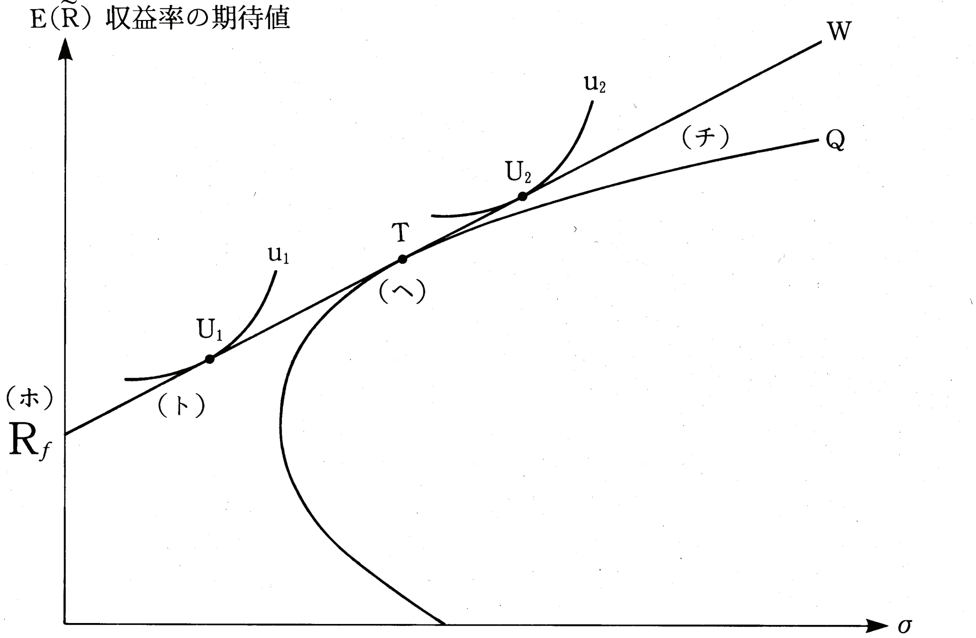
図２－37は、最小分散境界上の任意のリスク証券ポートフォリオを抽出して、安全証券と組み合わせた場合の、「収益率の期待値」と「収益率の標準偏差」の関係を示しています。いずれの組み合わせにおいても、R_fを切片としてリスク証券ポートフォリオを通過させた直線になることは、(5)で勉強したばかりです。

とするならば、危険回避的投資家の性格は永遠に治りませんから、R_fからリスク証券ポートフォリオに向かって引いた接線R_fTWが、最も心の満足が得られるという結論が導かれます。なぜなら、危険回避的投資家は同じ「収益率の標準偏差」ならより高い「収益率の期待値」を、また「収益率の期待値」が同じならより低い「収益率の標準偏差」を持ったポートフォリオを選好しますから、この直線上に勝る直線はないのです。

従って、リスク証券ポートフォリオに安全証券を組み合わせた場合、効率的ポートフォリオは、リスク証券ポートフォリオとの接点Ｔ（**接点ポートフォリオ**といいます）と、安全証券の組み合わせた直線上に位置することが導かれるのです。

図２－38は図２－37と同様に、リスク証券ポートフォリオと安全証券の投資比率を説明したものです。

図２－38



- （ホ）の点 R_f は、自己資金を100％安全証券に投資した場合。
- （ヘ）の点Ｔは、自己資金を100％リスク証券接点ポートフォリオＴに投資した場合。
- （ト）の直線 R_fT（R_f、Ｔを除く）の部分は、安全証券と接点ポートフォリオＴにある一定比率で投資した場合。
- （チ）の直線TW（Ｔを除く）部分は、安全証券を空売り（R_f の利子率で借入れを行ったのと同じ意味）して、その資金と自己資金を接点ポートフォリオＴに投資した場合。

危険回避的投資家が、この直線 R_fTW 上のどのポートフォリオを選択するかは、いつものとおり投資家のリスクとリターンの選好次第となります。

投資家の効用無差別曲線が、この直線 R_fTW と接する点が投資家にとっての心の満足度が一番高い最適ポートフォリオとなります。リスクをあまりとりたくない投資家ならば、貸付ポートフォリオである U_1 を、リスクをとってもリターンをとりたい投資家は、U_2 を選択するでしょう。このポートフォリオが彼らにとっての、各々の最適ポートフォリオとなるのです。

⑺　分離定理

さて、リスク証券ポートフォリオと安全証券を組み合わせたポートフォリオを考える時に、効率的ポートフォリオは安全証券と接点ポートフォリオＴの組み合わせとすることが必要不可欠でした。

この接点ポートフォリオＴは、危険回避的投資家のリスクとリターンの心の満足・不満足とはなんら関係なく、R_f から最小分散境界に向かって引いた接線によって勝手に決められた接点のポートフォリオＴでした。

従って、「リスク証券の最適組み合わせ」の決定問題と、「リスク証券と安全証券」を組み入れた場合の最適ポートフォリオの決定問題とは、分離可能であるということで、**分離定理**と呼ばれます。

①　投資の意思決定その１

リスク証券のポートフォリオは、投資可能なすべてのリスク証券の全体集合から選択されます。ここで効率的フロンティアが形成されますが、(6)で勉強したように安全証券が導入された場合、リスク証券のポートフォリオは接点ポートフォリオＴただ１つが選択されます。この決定は、投資家のリスクとリターンに関する好き嫌いには関係なく、これだと決められました。

――――― 分　離 ―――――

②　投資の意思決定その２

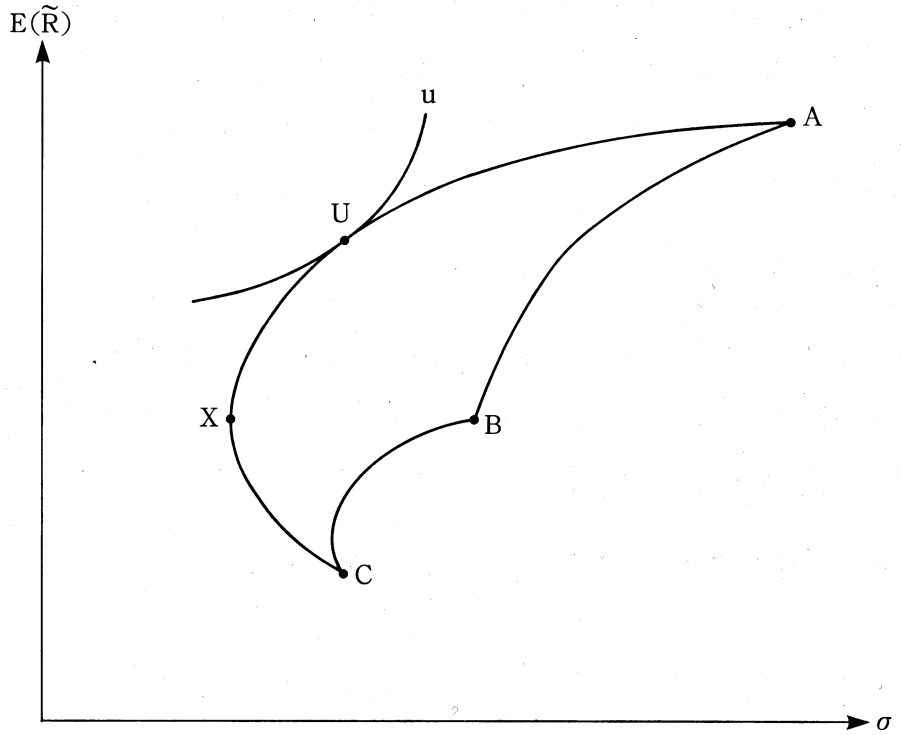
次に、直線 R_fTW 上のどのポートフォリオを選択するかは、投資家の心の満足の度合でした。

安全証券に何％、リスク証券ポートフォリオに何％投資しようかな？
私はこうしよう！

投資家	安全証券	接点ポートフォリオＴ
Ａさん	80％	20％　　（貸付ポートフォリオ）
Ｂさん	50％	50％
Ｃさん	－50％	150％　　（借入れポートフォリオ）

【練習問題 12】

危険資産 A、B、C で構成されたポートフォリオの実行可能な領域と、ある投資家の無差別曲線が示されています。投資金額割合をそれぞれ ω_A、ω_B、ω_C で表し、空売りは認めません。この時、次の問に答えて下さい。



(1)　投資機会集合は、図のどこで示されますか。

(2)　最小分散境界線は、図のどこで示されますか。

(3)　効率的フロンティアは、図のどこで示されますか。

(4)　この投資家にとっての最適ポートフォリオは、図のどこで示されますか。

4．「収益率の期待値」と「収益率の分散・標準偏差」の推定

(1)「収益率の期待値」の推定

さて、今まで受講生の皆さんの混乱を避けるために、あえて本分冊の最後にもってきたのが「推定」です。

ここまでは「収益率の期待値」の計算においては、ある証券の「実現可能な収益率」と、それに対応する生起確率が与えられていました。現実にはこのようにはうまく想定できないのが普通でしょう。そこで、過去においての収益率の分布が将来も同型であるという仮定のもとで、過去の実測値からその推定を行うことになります。

〔例題 18〕

リスク証券Ｘの１月から12月までの月次収益率は、表２－39のようでした。この過去のデータから、リスク証券Ｘの「収益率の期待値」の推定値を求めて下さい。

表２－39　証券Ｘの月次収益率

（年率：％）

	月次収益率
1月	5.3
2月	0.1
3月	－4.6
4月	12.8
5月	8.4
6月	1.5
7月	10.2
8月	7.7
9月	3.0
10月	－9.8
11月	6.9
12月	4.1

〔解説〕

リスク証券Xの過去の12ヶ月の収益率のデータから、「収益率の期待値」を推定します。これは実現値のデータを合計して、データ数（本例の場合は、12）で割ればよいので簡単です。

$$\frac{5.3+0.1+\cdots\cdots+4.1}{12}=3.8\%$$

一般にn個の実測値 X_1、X_2、……X_n から推定された「収益率の期待値」は、

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ で計算されます。

(2) 「収益率の分散・標準偏差」の推定

(1)で、「収益率の期待値」の推定値の求め方について勉強しました。推定の方法自体は、それほど難しくはありませんでしたね。

「収益率の分散」については、ある資産の「実現可能な収益率」と、それに対応する生起確率が与えられていた時に行った計算方法と異なる点がありますから、注意して下さい。

表2－40　証券Xの月次収益率

（年率：%）

	月次収益率
1月	5.3
2月	0.1
3月	－4.6
4月	12.8
5月	8.4
6月	1.5
7月	10.2
8月	7.7
9月	3.0
10月	－9.8
11月	6.9
12月	4.1

「収益率の期待値」の推定値＝3.8%

「収益率の分散」の計算式は、

$$(5.3-3.8)^2 + (0.1-3.8)^2 + \cdots\cdots + (4.1-3.8)^2$$

と計算してもよいですし、

$$(5.3)^2 + (0.1)^2 + \cdots\cdots + (4.1)^2 - (3.8)^2 \times 12 \text{（データ数）}$$

で計算してもよいです。いずれにしても合計すると、445.4となります。確認して下さい。

ここからが大きく異なります。合計した数値を（データ数－1）、すなわちデータ数から1を引いた値で割って求めた数値が、「収益率の分散」の推定値となります。

本例では、

$$445.4 \div 11 = 40.5\ (\%)^2$$

が「収益率の分散」の推定値となります。

標準偏差は、分散の平方根をとることに何ら変わりはありません。

$$\sqrt{40.5(\%)^2} = 6.36\%$$

また、共分散の推定値を求める場合にも、データ数から1を引いた値で割って求めます。

なぜ標本数－1で割るかについては、高度な数学的証明が必要です。どうしても気になる方は、巻末補論Ⅱに書いてありますので参照下さい。なお、これはやさしくは書けないのでご容赦願いたいと思います。